

TD de mécanique (Série 2)

Exercice 1

A l'instant $t = 0$, un corps est lancé avec une vitesse initiale V_0 dont le module est 4 m/s. Calculer l'abscisse du point le plus élevée de la trajectoire (point culminant) et la date correspondante ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Exercice 2

Une particule se déplace avec une accélération donnée en coordonnées cartésiennes

par :
$$\vec{a} = \exp(-t)\vec{i} + 5 \sin(t)\vec{j} - 3 \cos(t)\vec{k}$$

A $t = 0$, la particule est située en $(1, 0, 3)$, sa vitesse est alors $(1, 2, -1)$.

Déterminer la vitesse et la position de la particule quel que soit t .

Exercice 3

Une particule, initialement à l'origine, se déplace sur l'axe Ox avec une vitesse constante \vec{V}_0 . L'axe Ox tourne autour de l'axe Oz qui lui est perpendiculaire à la vitesse ω constante.

- 1- Rappeler les expressions des composantes des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires.
- 2- Déterminer l'équation de la trajectoire de la particule en coordonnées polaires
- 3- Exprimer l'accélération en fonction de V_0 , ω et des vecteurs unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

Exercice 4

Les coordonnées cartésiennes d'un point mobile dans un repère orthonormé direct (Ox, Oy) sont : $x = A \cos \omega t$; et $y = A \sin \omega t + B$ ($A = 10 \text{ cm}$; $B = 15 \text{ cm}$)

- 1) Quelle est l'allure de la trajectoire du mobile et de son hodographe ?
- 2) Montrer que le mouvement est uniforme et calculer sa vitesse
- 3) Calculer le module du vecteur accélération \vec{a} et déterminer ensuite les valeurs des composantes tangentielles et normales de l'accélération ($\omega = 3.15 \text{ rad/s}$)

Exercice 5

Dans un repère cartésien fixe R (Oxyz), un point mobile M est repéré par son vecteur position:

$$\vec{OM} = t \vec{e}_x + at^2 \vec{e}_y \quad (a \text{ est une constante positive et } t \text{ est le temps})$$

où $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est la base orthonormée directe associée à R.

- 1- a- Trouver l'équation de la trajectoire de la particule M.
b- Quelle est la nature de cette trajectoire ?
- 2- Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_{(M/R)}$ et calculer son module.
- 3- Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}_{(M/R)}$ et calculer son module
- 4- Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_{(M/R)}$ dans la base de Frenet
- 5- Trouver le rayon de courbure de la trajectoire de la particule M.
- 6- Exprimer les coordonnées polaires r et θ en fonction de t .

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé xOy d'origine O et de base (\vec{i}, \vec{j}) . Les coordonnées x et y d'un point M mobile dans le plan varient avec le temps t selon les relations :

$$x = 2 \cos(0.5 t) \quad \text{et} \quad y = 2 \sin(0.5 t)$$

- 1- Déterminer la nature de la trajectoire.
- 2- Déterminer les composantes du vecteur vitesse \vec{V} .
- 3- Déterminer l'expression de la vitesse $\frac{dS}{dt}$ ainsi que celle de l'abscisse curviligne S du point M à l'instant t , en prenant comme condition initiale $S = 0$ à $t = 0$.
- 4- Calculer les composantes du vecteur accélération, puis les expressions des accélérations tangentielles et normale.
- 5- Déterminer l'expression du rayon de courbure de la trajectoire.
- 6- La trajectoire reste la même, mais maintenant, le point M subit une accélération angulaire $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{t}{5}$. A quelle date, le point M atteint-il une vitesse linéaire de 10 m/s sachant qu'il est parti au repos ? Quelle distance a-t-il alors parcouru ?

Exercice 7

On étudie le mouvement d'un point M dont le vecteur accélération est donné par :

$$\vec{a} = k \frac{\overline{OM} \wedge \vec{V}}{r^3}$$

Où k est une constante positive donnée, O un point fixe, \vec{V} le vecteur vitesse de M et r la distance OM supposée non nulle. A l'instant $t = 0$, le vecteur vitesse \vec{V}_0 est perpendiculaire \overline{OM}_0 . On pose $a = OM_0$, la valeur initiale de r . et $S(0) = 0$

- 1- Exprimer, en fonction de t , l'abscisse curviligne de M sur sa trajectoire en prenant pour origine la position initiale.
- 2- Calculer la dérivée par rapport au temps du produit scalaire $\overline{OM} \cdot \vec{V}$. En déduire l'expression de r en fonction du temps.
- 3- On appelle α l'angle entre \overline{OM} et \vec{V} . Trouver α en fonction de V_0 , a et t .
- 4- Calculer, en fonction de α , le module du vecteur accélération \vec{a} de M et le rayon du courbure de la trajectoire de M .

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{6} e^t - \frac{1}{15} e^{-2t}$$

Series 23

Ex 1:

$$\vec{r} = e^{-t} \vec{i} + 5 \sin t \vec{j} - 3 \cos t \vec{k}$$

$$\text{At } t=0 \quad \vec{OM} = \vec{i} + 3\vec{k}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$\vec{r} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = e^{-t} \Rightarrow V_x = \int e^{-t} = -e^{-t} + 2$$

$$V_y = 5 \int \sin t = -5 \cos t + 2, \quad C = 2$$

$$V_z = -3 \int \cos t = -3 \sin t + C, \quad C = -1$$

$$\vec{V} = (-e^{-t} + 2) \vec{i} + (-5 \cos t + 2) \vec{j} - (3 \sin t + 1) \vec{k}$$

$$\text{on a } V_x = -e^{-t} + 2$$

$$V_y = -5 \cos t + 2 \Rightarrow V_z = -3 \sin t - 1$$

$$\Rightarrow x = \int (-e^{-t} + 2) dt = e^{-t} + 2t + 1$$

$$\Rightarrow y = \int -5 \cos t + 2 dt + y_0$$

$$y = -5 \sin t + 2t$$

$$z = \int (-3 \sin t - 1) dt = 3 \cos t - t + C, \quad C = 0$$

done:

$$\vec{OM} = (-e^{-t} + 2t + 1) \vec{i} + (-5 \sin t + 2t) \vec{j} - (3 \cos t - t) \vec{k}$$

3 Les composantes des vecteurs $r = \rho$. Eq polaire d'une spirale, position, vitesse et accélération en coordonnées polaires : $\vec{OM} = r\vec{e}_r$
 $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
 avec $\omega = \dot{\theta}$, ω est de et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$
 $= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$
 $= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$
 avec $\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = 0$
 $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r - r\omega^2\vec{e}_r$
 2 - Le pt M se déplace sur l'axe (ox) d'une vitesse de \Rightarrow un mot rectiligne uniforme \Rightarrow on aura l'eq. suivante.
 $r(t) = v_0 t + cte$
 $r(0) = 0$
 $r(t) = v_0 t$ (1)
 Et puis qu'on a l'axe (ox) tourne autour (oz) avec une vitesse $\omega = cte$
 $\theta(t) = \omega t + c_1$
 $\theta(0) = 0$
 $\Rightarrow t = \frac{\theta(t)}{\omega}$
 on remplace dans l'eq. (1).
 $r(t) = v_0 \frac{\theta(t)}{\omega}$
 r varie proportionnellement avec θ , donc le pt M quand il tourne avec l'angle θ , il s'éloigne de l'origine, c'est l'eq

3 - on a $r(t) = v_0 t \Rightarrow \dot{r} = v_0$
 Et on a
 $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
 on remplace, on a
 $\vec{a} = r(\dot{\theta})^2\vec{e}_r + 2v_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
 $= -r\omega^2\vec{e}_r + 2v_0\omega\vec{e}_\theta$
 avec $\vec{a}_r = -r\omega^2\vec{e}_r$
 $\vec{a}_\theta = 2v_0\omega\vec{e}_\theta$
 Ex 4
 $x = A \cos \omega t$, $A = 10 \text{ cm}$
 $y = A \sin \omega t + B$, $B = 15 \text{ cm}$
 1 - L'allure de la trajectoire on a $\vec{OM} = x\vec{i} - y\vec{j}$
 $x(t) = A \cos \omega t$
 $y(t) = A \sin \omega t + B$
 on remarque que
 $x^2 + (y - B)^2 = A^2$
 $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$
 $x^2 + (y - B)^2 = A^2$ c'est l'eq. d'un cercle de rayon $A = 10$ et de centre $O(0, B)$
 2 - l'hodographe
 $x(t) = A \cos \omega t$
 $\Rightarrow v_x(t) = -A\omega \sin \omega t$
 $y(t) = A \sin \omega t + B$
 $\Rightarrow v_y(t) = A\omega \cos \omega t$
 $v_x^2 + v_y^2 = (A\omega)^2$
 2) $v = cte \Rightarrow$ Mot est uniforme
 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = A\omega = cte$
 \Rightarrow Mot uniforme.
 A.N : $v = 10 \cdot 10^{-2} \cdot 3,15$
 $v = 0,315 \text{ m/s}$



ETU SUP.com

Programme
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..